Universitetet i Oslo
Jon Vislie

Veiledning til enkelte oppgaver i ECON2200 - Matematikk 1/Mikroøkonomi 1, Våren 2012

Oppgave 1. Produksjons- og markedsteori

(Se også oppgave 5 i kap. 5 og oppgave 9 i kap. 3 i Strøm & Vislie)

Vi betrakter en økonomi der det produseres to varer, i mengdene x_1 og x_2. Vare 1 produseres kun ved bruk av arbeidskraft som produksjonsfaktor, betegnet *n*, i henhold til produktfunksjonen $f(n)$. Anta at $f(0) = 0$, $\frac{df(n)}{dn} = f'(n) > 0$ og at $\frac{d^2 f(n)}{dn^2} = f''(n) < 0$.

i) Forklar i ord hva de antatte egenskapene ved produktfunksjonen $x_1 = f(n)$ betyr.

Svar: De antatte egenskapene ved produktfunksjonen $x_1 = f(n)$ sier at arbeidskraftens grenseproduktivitet $\frac{df(n)}{dn} = f'(n) > 0$, men avtakende; dvs. $f''(n) < 0$ og at $f(0) = 0$, betyr: Vi får ikke noe produkt uten arbeidsinnsats (arbeidskraft er en essensiell faktor), bidraget fra en marginal arbeidstime er positivt, men lavere jo flere timer som er satt inn.

ii) Utled etterspørselsfunksjonen for arbeidskraft for denne bedriften, skrevet som $n(w, p_1)$, når dens eiere maksimerer overskuddet til gitt pris per enhet av ferdigvaren, p_1, og gitt lønn per enhet arbeidskraft, *w*. (Anta indre løsning.)

Svar: Etterspørselsfunksjonen for arbeidskraft for denne bedriften, skrevet som $n(w, p_1)$, når dens eiere maksimerer overskuddet til gitt pris per enhet av ferdigvaren (p_1) og gitt lønn per enhet arbeidskraft (*w*), følger av å løse følgende problem: Profitten som funksjon av *n* er: $\pi(n) = p_1 f(n) - wn$. Denne skal maksimeres med hensyn på *n*. Fra profittuttrykket finner vi: $\pi'(n) = p_1 f'(n) - w \;\; og \;\; \pi''(n) = p_1 f''(n) < 0$. Siden vi regner med indre løsning,

finnes det en entydig arbeidsinnsats $(n = n^*)$ som oppfyller
$\pi'(n^*) = p_1 f'(n^*) - w = 0$. (Indre løsning krever at $\pi'(0) = p_1 f'(0) - w > 0$. Dette betyr at vi må kreve at $f'(0) > \frac{w}{p_1}$; dvs. at grenseproduktiviteten av den «første arbeidstimen» overstiger «reallønna». Hvis denne betingelsen ikke holder, vil, fordi grenseproduktiviteten selv er avtakende, vil vi ikke kunne få førsteordensbetingelsen oppfylt. Videre vil grenseproduktiviteten kunne bli svært lav bare vi setter inn «masse» arbeidstimer – det begrenser ønsket mengde arbeidskraft.) Fordi 2.ordensbetingelsen for et maksimum er oppfylt, følger det ønskede nivået fra 1.ordensebetingelsen. Denne betingelsen bestemmer da verdien på den endogene variabel, n, for alle tenkelige verdier av de eksogent gitte prisene – egentlig det vi har kalt reallønna - så lenge denne betingelsen holder. Betingelsen fastlegger med andre ord ønsket bruk av arbeidskraft (lik etterspørselen), generelt skrevet som $n(w, p_1)$.
Noen vil kanskje "løse" denne: $f'(n(w, p_1)) = \frac{w}{p_1} \Rightarrow n(w, p_1) = (f')^{-1}(\frac{w}{p_1}) := h(\frac{w}{p_1})$ med $h(.)$ som den inverse av f'. (Husk at det kun er relative priser som betyr noe for tilpasningen; en k-dobling av prisene har ingen innvirkning på tilpasningen.)

iii) Ved implisitt derivasjon av bedriftens tilpasningsbetingelse skal du vise hvordan etterspørselen etter arbeidskraft påvirkes av en økning i lønna w. Forklar i ord hvorfor en k-dobling av w og p_1 ikke påvirker bedriftens tilpasning.

Svar: Ved implisitt derivasjon av tilpasningsbetingelsen $p_1 f'(n) - w = 0$, og når vi samtidig bruker at $n(w, p_1)$, ser vi direkte ved bruk av kjerneregelen, at

$$p_1 f''(n) \cdot \frac{\partial n(w, p_1)}{\partial w} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n(w, p_1)}{\partial w} = \frac{1}{p_1 f''} < 0.$$

Arbeidsinnsatsen synker når lønna øker.
Når produktprisen øker, vil vi fra førsteordensbetingelsen finne:

$$f'(n) + p_1 f''(n) \cdot \frac{\partial n(w, p_1)}{\partial p_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial p_1} = -\frac{f'(n)}{p_1 f''(n)} > 0$$

med de angitte forutsetningene. Høyere produktpris motiverer bedriften til økt bruk av arbeidsinnsats. Når faktorinnsatsen øker, vil tilbudt (lik produsert) kvantum av ferdigvaren også øke siden grenseproduktiviteten er positiv. En alternativ rute å følge er å skrive førsteordenbetingelsen som en regel for tilbudt kvantum: Vi har jo at $p_1 = \frac{w}{f'(n)}$; dvs. at produksjonen skal innstilles slik at grensekostnaden $\frac{w}{f'(n)}$ blir lik produktprisen. Husk tolkningen av denne brøken; den angir kroner per time dividert med produktmengde per (marginale) time; dvs. hele brøken har måleenhet kroner per (marginale) enhet av produktet, som også er måleenheten til produktprisen. Når produktprisen øker, må grensekostnaden opp – den eneste måten å få dette til på, med gitt lønn – er å øke arbeidsinnsatsen slik at grenseproduktiviteten selv synker. Denne måten å beskrive tilpasningen på er et supplement til det vi har gjort tidligere. Videre ser vi, som nevnt tidligere, at en k-dobling av w og p_1 ikke påvirker bedriftens tilpasning, siden tilpasningsbetingelsen er upåvirket. (Tolkning: Uansett hva slags "valuta" arbeidskraft og ferdigvaren noteres i, vil tilpasningen være den samme.)

Vare 2 produseres i et kvantum x_2 i en bedrift ved hjelp av arbeidskraft (N) og energi (E) med en produktfunksjon $x_2 = F(N,E)$. Vi antar at $F(N,E)$ er strengt voksende i hver produksjonsfaktor, den har konstant skalautbytte og har avtakende marginal teknisk substitusjonsbrøk. Bedriften minimerer kostnadene for gitt produktmengde, til gitte priser på de to produksjonsfaktorene, nemlig lønn per enhet arbeidskraft (w) og pris per enhet energi (q).

iv) Formuler kostnadsminimeringsproblemet til bedriften og utled de betingede faktoretterspørselsfunksjonene eller faktorfunksjonene $N(w,q,x_2)$ og $E(w,q,x_2)$. Illustrer løsningen, for gitte priser, i en figur. (Anta indre løsning.)

Svar: Kostnadsminimeringsproblemet til bedriften går nå ut på å finne den faktorkombinasjonen som minimere samlet faktorutlegg. Dette problemet, nemlig $Min_{(N,E)} \left\{ wN + qE \,\middle|\, F(N,E) = x_2^0(gitt) \right\}$, kan løses ved hjelp av Lagranges metode. La Lagrangefunksjonen være $L = wN + qE - \lambda[F(N,E) - x_2^0]$, med λ som Lagrangemultiplikator. Siden vi antar indre løsning, vil den kostnadsminimerende faktorkombinasjonen, gitt som (N^*, E^*), finnes som stasjonærpunktene til Lagrangefunksjonen (som vi vet gir oss «tangeringsbetingelsen»), gitt ved:

$$\frac{\partial L(N^*,E^*,\lambda)}{\partial N} = w - \lambda \frac{\partial F(N^*,E^*)}{\partial N} = 0$$

$$\frac{\partial L(N^*, E^*, \lambda)}{\partial E} = q - \lambda \frac{\partial F(N^*, E^*)}{\partial E} = 0$$

Vi kan eliminere Lagrangemultiplikatoren og kommer fram til "tadngeringsbetingelsen": $MTSB(N^*, E^*) = \frac{F_N(N^*, E^*)}{F_E(N^*, E^*)} = \frac{w}{q}$, der $MTSB$ angir den marginale tekniske substitusjonsbrøk som angir det marginale tekniske bytteforholdet for gitt produksjon; dvs., hvor mange enheter energi som kan frigjøres per enhets økning i arbeidsinnsatsen uten at produksjonen endres. Den isokostlinjen som svarer til lavest faktorutlegg tangerer den gitte isokvanten; se figur 3.9 i Strøm & Vislie. "Tangeringsbetingelsen", sammen med produksjonskravet $x_2^0 = F(N, E)$, gir to likninger til å bestemme de betingede faktoretterspørselsfunksjonene $N(w, q, x_2^0)$ og $E(w, q, x_2^0)$. Siden disse betingelsene må gjelde uansett hvor mye som skal produseres (gitt at vi har indre løsning), kan vi generelt skrive dem som $N(w, q, x_2)$ og $E(w, q, x_2)$ ved å endre det gitte produksjonskravet.

Med antakelsen om konstant skalautbytte – eller at produktfunksjonen er homogen av grad én i N og E – vet vi at hver grenseproduktivitet selv er homogen av grad null. (Se avsnitt 3.1.d og 3.2.e i Strøm & Vislie.) Dermed vil hver grenseproduktivitet og dermed MTSB være konstant langs enhver faktorstråle, der faktorforholdet er konstant. (Ved en proporsjonal faktorvariasjon – ved en bevegelse langs en faktorstråle – vil grenseproduktiviteten til hver faktor være uendret.) For gitt faktorprisforhold vil da substitumalen være en rett linje gjennom origo. Uansett hvor mye som skal produseres, vil tilpasningen, for det gitte faktorprisforholdet, finne sted langs denne substitumalen. Med andre ord fastlegges faktorforholdet som er det samme uansett hvor mye som skal produseres, for uendret faktorprisforhold. Dermed må gjennomsnittskostnaden være konstant og bestemt ene og alene av faktorprisene. Vi kaller denne enhetskostnadsfunksjonen (som er lik grensekostnaden) for $\phi(w, q)$, slik at kostnadsfunksjonen i dette tilfellet kan skrives som, $C(x_2, w, q) = \phi(w, q) \cdot x_2$.

v) Vis at $N(w, q, x_2) = \phi_w(w, q) \cdot x_2$, der $\phi_w(w, q) = \frac{\partial \phi(w, q)}{\partial w}$.

Svar: Kostnadsfunksjonen fremkommer nå som den minimerte verdien av samlet faktorutlegg: $C(x_2, w, q, x_2) = wN(w, q, x_2) + qE(w, q, x_2) = \phi(w, q) \cdot x_2$. Svaret følger fra Shephard's lemma; nemlig ved å starte med $\frac{\partial C}{\partial w} = \phi_w(w, q) \cdot x_2 = w \frac{\partial N}{\partial w} + N + q \frac{\partial E}{\partial w}$. For gitt produktmengde må vi ha $x_2 = F(N(w, q, x_2), E(w, q, x_2))$. Med konstant

produktmengde følger det ved derivasjon med hensyn på w, når vi samtidig benytter førsteordenbetingelsene for et kostnadsminimum, at:
$0=\frac{\partial F}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial w}=\frac{w}{\lambda}\frac{\partial N}{\partial w}+\frac{q}{\lambda}\frac{\partial E}{\partial w}=\frac{1}{\lambda}\left[w\frac{\partial N}{\partial w}+q\frac{\partial E}{\partial w}\right]$. Brukes dette i uttrykket for $\frac{\partial C}{\partial w}$, finner vi rett frem $\frac{\partial C}{\partial w}=\phi_w(w,q)\cdot x_2=N(w,q,x_2)$. (Tilsvarende kan det vises at $\frac{\partial C}{\partial q}=E(w,q,x_2)=\phi_q(w,q)\cdot x_2$.)

vi) Forklar hvorfor enhetskostnadsfunksjonen $\phi(w,q)$ har følgende egenskaper: $\phi_{ww}(w,q)=\frac{\partial^2\phi(w,q)}{\partial w^2}<0$, $\phi_{wq}(w,q)=\frac{\partial^2\phi(w,q)}{\partial w\partial q}>0$.

Svar: Den direkte annenderiverte er negativ siden økt lønn (som følge av substitusjon for gitt produksjon) vil føre til mindre bruk av arbeidskraft og mer bruk av energi; derfor er $\phi_{ww}<0$, siden vi må ha: $\frac{\partial N(w,q,x_2)}{\partial w}=\phi_{ww}(w,q)x_2<0$. Ved uendret faktorbruk vil en høyere lønn føre til at samlet faktorutlegg er lineær i lønna. Men fordi det er substitusjonsmuligheter, vil bedriften bruke mindre av den faktor som er blitt relativt dyrere. Siden produksjonen skal opprettholdes, må bruken av den andre faktoren øke; derfor må $\frac{\partial E(w,q,x_2)}{\partial w}=\phi_{qw}(w,q)x_2>0$. Hovedpoenget er substitusjon! (Disse effektene er helt ekvivalente med substitusjonseffekter av en prisendring i konsumenttilpasningen.)

Til slutt skal vi se nærmere på hva lønna må være for at arbeidsmarkedet skal være i likevekt. Arbeidskraft blir etterspurt av de to bedriftene, som hver for seg opptrer som prisfast kvantumstilpasser i arbeidsmarkedet som er av frikonkurranse-typen, i henhold til etterspørselsfunksjonene som er utledet tidligere i oppgaven, når det antas at samlet tilbud av arbeid er eksogent gitt og lik *M*. Samtidig oppfattes p_1, q og x_2 som eksogent gitte størrelser. Likevektslønna, betegnet $\tilde{w}$, må da oppfylle likevektsbetingelsen

$$\phi_w(\tilde{w},q)\cdot x_2+n(\tilde{w},p_1)=M$$

der vi for produsenten av vare 2 bruker at $N(w,q,x_2)=\phi_w(w,q)\cdot x_2$, og etterspørselsfunksjonen for arbeidskraft for produsenten av vare 1 fra første del av oppgaven.

vii) Forklar i ord hva det betyr at likevektslønna kan uttrykkes som en funksjon av p_1, q, x_2 og M; dvs. $\tilde{w} = W(p_1, q, x_2, M)$. Ved å bruke de egenskapene som er utledet om etterspørselssammenhengene, skal du ved implisitt derivasjon av likevektsbetingelsen vise og forklare hvordan likevektslønna blir påvirket av at

- energiprisen (q) øker partielt
- tilbudet av arbeidskraft (M) øker partielt
- økt produksjon av vare 2

Svar: For gitt pris på vare 1, gitt pris på energi og gitt mengde av vare 2, vil samlet etterspørsel, for en gitt lønn, være $n(w, p_1) + N(w, q, x_2)$. For at denne etterspørselen skal være lik det eksogent gitte tilbudet M, må lønna ta en helt bestemt verdi, nemlig $\tilde{w}$, slik at det skapes likevekt. Likevektslønna, $\tilde{w}$, må da oppfylle likevektsbetingelsen $\phi_w(\tilde{w}, q) \cdot x_2 + n(\tilde{w}, p_1) = M$, som kan leses som én betingelse til fastlegging av den endogene variabel (lønn) for gitte verdier på de øvrige variable som er eksogene i problemet. En lønn høyere (lavere) enn $\tilde{w}$, vil gi tilbudsoverskudd (etterspørselsoverskudd), og ved en annen lønn enn likevektslønna, vil vi ikke ha likevekt. At vi kan skrive likevektslønna som $\tilde{w} = W(p_1, q, x_2, M)$, betyr at for endringer i en eller flere eksogene størrelser, vil beliggenheten på de to etterspørselssammenhengene bli påvirket (gjennom positive eller negative skift), med den følge at likevektslønna må endres.
Vi skal nå analysere hvordan $\tilde{w}$, som er endogen i denne markedsmodellen, nå vil bli påvirket av endringer i variable som i modellen er å oppfatte som eksogene, nemlig

- energiprisen (q) øker partielt
- tilbudet av arbeidskraft (M) øker partielt
- økt produksjon av vare 2

Svar: Ved implisitt derivasjon av $\phi_w(\tilde{w}, q) \cdot x_2 + n(\tilde{w}, p_1) = M$, når vi bruker at $\tilde{w} = W(p_1, q, x_2, M)$, følger:

- Energiprisen q øker: Da deriverer vi likevektsbetingelsen med hensyn på q, hensyn tatt til at lønna avhenger a denne prisen. Vi finner da:

$$\phi_{ww}x_2\frac{\partial W}{\partial q}+\phi_{wq}x_2+\frac{\partial n}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial q}=0\Rightarrow\frac{\partial W}{\partial q}=\frac{-\phi_{wq}x_2}{\phi_{ww}x_2+\frac{\partial n}{\partial w}}>0$$

Her er nevneren er negativ siden $\phi_{ww}<0$ og $\frac{\partial n}{\partial w}=\frac{1}{p_1 f''}<0$, samtidig som vi har vist at $\phi_{wq}>0$. Begrunnelsen er: Når *q* øker, vil bedrift 2 bruke mindre energi og mer arbeidskraft for å produsere den gitte mengden av vare 2. Dette skifter etterspørselen etter arbeidskraft i bedrift 2 opp. For uendret lønn, vil bedriftene ønske å bruke mer arbeidskraft enn det som er tilgjengelig. For å få realisert disse ønskene, må lønna øke for at bedrift 1 skal være villig til å gi fra seg arbeidskraft i og med at samlet tilbud M er uendret.

- Tilbudet av arbeidskraft *M* øker: Ved implisitt derivasjon av likevektsbetingelsen med hensyn på *M*, finner vi:

$$\phi_{ww}x_2\frac{\partial W}{\partial M}+\frac{\partial n}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial M}=1\Rightarrow\frac{\partial W}{\partial M}=\frac{1}{\phi_{ww}x_2+\frac{\partial n}{\partial w}}<0$$

Lønna må gå ned når tilbudet av arbeidskraft øker. For at bedriftene skal være villige til å ta i mot det økte tilbudet, må lønna gå ned, så lenge de øvrige eksogene faktorene er uendret. Hvis lønna skulle forbli uendret, ville ingen av bedriftene endre tilpasning og dermed heller ikke ønske å ta i mot det økte tilbudet.

- Bedrift 2 skal nå produsere et større kvantum.

Rent intuitivt skal vi tro at lønna må opp all de tid bedrift 2 nå vil måtte bruke mer arbeidskraft for å realisere det nye produksjonskravet. (Husk a substitumalen er stigende.) Med uendret tilbud må denne arbeidskraften frigjøres fra sektor 1 som må bli fortalt gjennom prisene at arbeidskraft er blitt dyrere og derfor vil sysselsette færre arbeidere. At det må være sånn ser vi ved implisitt derivasjon av likevektsbetingelsen med hensyn på x_2. Vi finner da:

$$\phi_w+x_2\phi_{ww}\frac{\partial W}{\partial x_2}+\frac{\partial n}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial x_2}=0\Rightarrow\frac{\partial W}{\partial x_2}=-\frac{\phi_w}{\phi_{ww}x_2+\frac{\partial n}{\partial w}}>0.$$

Nevneren er negativ, mens $\phi_w>0$. Minustegnet inkludert, gir effekten.

Oppgave 2. Konsumenttilpasning
(Jfr. Oppgave 3 fra plenumsregning den 25.april.)

Betrakt en husholdning med preferanser over konsum av en vare som bare kan kjøpes i markedet til pris *p*. (La mengden av denne angis ved *c*.) Videre inngår en vare *x* som kan kjøpes i markedet til pris *q*, men som også kan produseres hjemme. Vi lar den delen av *x*-varen som kjøpes eksternt være gitt ved x_1, og vi lar x_2 være den mengden som produseres hjemme. Denne hjemmeproduksjonen er bestemt av den tid (h) som brukes av husholdningen, med en produktfunksjon $x_2 = g(h)$. Vi antar $g(0) = 0,\ g'(h) > 0\ og\ g''(h) < 0$. I tillegg til fysisk konsum, inngår også fritid (f) i husholdningens preferanser som vi skriver som: $U(c, x, f)$ der $x = x_1 + x_2$. (Vi antar at denne nyttefunksjonen er voksende i alle argumenter og at den marginale substitusjonsbrøk mellom et hvert par av goder er strengt avtakende.) Lønna per time er gitt og lik w. Hvis arbeidstid er n, følger tidsbudsjettet som $f + h + n = T$, med T som tilgjengelig tid for den perioden vi betrakter. Samlet lønnsinntekt er da wn som brukes til å kjøpe $c-$varen og til å skaffe seg $x-$varen eksternt; dvs. vi må ha $pc + qx_1 = wn$.

a) Anta først at arbeidstiden er gitt, samtidig som vi skal tenke oss at hjemmeproduksjon i første omgang ikke er mulig. Hva kjennetegner optimal tilpasning for husholdningen i dette tilfellet? Hva er virkningen av høyere lønn?

Svar: Vi antar nå at hjemmeproduksjon ikke er mulig; dvs. $h = 0$, samt at arbeidstiden er gitt lik $\overline{n}$. Dermed følger fritiden som: $f = T - \overline{n} = \overline{f}$ som da er en gitt størrelse og ikke gjenstand for tilpasning. Hvilke valg har da husholdningen? La lønnsinntekt nå være $m = w\overline{n}$ som er gitt og kan anvendes til kjøp av to varer etter budsjettbetingelsen $pc + qx_1 = m$. Standard konsumenttilpasning: Hvordan vil den gitte inntekten fordeles på kjøp av de to varene; dvs. problemet er
$Max_{(c,x)}\ U(c, x, \overline{f})\ gitt\ pc + qx = m$.

Setter vi inn fra budsjettbetingelsen i nyttefunksjonen, vil valget være redusert til å bestemme forbruk av én av varene (mens den andre da følger fra budsjettbetingelsen). Setter vi inn for c fra budsjettbetingelsen vil problemet være redusert til å finne ønsket kjøp av x-varen slik at $U(\frac{m}{p} - \frac{q}{p}x, x, \overline{f})$ maksimeres. (Vi har én frihetsgrad som gir oss rom til å optimere.) Kaller vi denne funksjonen for $V(x)$, vil tilpasningsbetingelsen være bestemt fra $V'(x) = 0$ eller $U_c \cdot (-\frac{q}{p}) + U_x = 0$ som vi kan skrive som $\frac{U_x}{U_c} = \frac{q}{p}$; dvs. marginal substitusjonsbrøk $(-\frac{dc}{dx})_{U=konst} = \frac{q}{p}$. Det subjektive bytteforholdet, MSB, skal settes lik markedsbytteforholdet. Høyere lønn vil ha tilsvarende virkning som om inntekten m øker. (Etterspørselen påvirkes via inntektselastisitetene.)

b) Anta at arbeidstiden fremdeles er gitt, men nå er hjemmeproduksjon mulig. Hva kjennetegner optimal tilpasning i dette tilfelle?

Svar: Vi opprettholder antakelsen om gitt arbeidstid, men utvider handlingsrommet ved at hjemmeproduksjon er mulig; dvs. en har at $h \geq 0$. Da må vi ha en ytterligere avveining, siden husholdningen nå må ta innover seg to bibetingelser: $pc + qx_1 = w\bar{n} := m$ og $f + h = T - \bar{n}$ eller $f = T - \bar{n} - h$. Tiden har konkurrerende eller alternative anvendelser: hjemmeproduksjon og fritid. Hjemmeproduksjon kan erstatte kjøp ute slik at en større del av den disponible lønnsinntekten kan anvendes til kjøp av c – varen.

Nå er tilpasningsproblemet: $Max_{(x_1,h)}\ U(\frac{m}{p} - \frac{q}{p}x_1, x_1 + g(h), T - h - \bar{n}) := V(x_1, h)$ som viser at nå er det to frihetsgrader gitt ved at det er to valg som må fattes. (Disse V-funksjonene er **ikke** verdifunksjoner; de er nyttefunksjonen uttrykt ved de variable som skal bestemmes.) En indre løsning er da kjennetegnet ved $\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 = \frac{\partial V}{\partial h}$, som gir følgende tilpasningsbetingelser: $\begin{cases} -U_c(\frac{q}{p}) + U_x = 0 \ \ for\ optimal\ h \\ U_x \cdot g'(h) - U_f = 0 \ \ for\ optimal\ x_1 \end{cases}$

Fra den første finner vi: $\frac{U_x}{U_c} = \frac{q}{p}$ som tidligere. Den nye avveiningen følger som: $\frac{U_x}{U_f} = \frac{1}{g'(h)}$ som viser hvor mye fritid en er villig til å avstå for å få en enhet til av x – varen, mens høyre side viser nettopp det antall timer en må jobbe hjemme for å få en enhet til av x-varen. Motsatt: $\frac{U_f}{U_x} = g'(h)$. Venstre side viser hvor mye mer av x – varen en i det minste må ha for å gi opp en time fritid, mens høyre siden viser alternativverdien av fritid i hjemmeproduksjon, gitt ved marginalavkastningen av tid brukt på å frembringe x-varen hjemme. Igjen vil høyere lønn nå gi en økning i m og dermed økt etterspørsel etter alle fullverdige varer.

c) Anta at arbeidstiden også kan bestemmes av husholdningen. Hva kjennetegner optimal tilpasning nå? Hva er virkningen på tilpasningen av høyere lønn i dette tilfellet?

Svar: Vi må nå ha en ytterligere avveining i og med at arbeidstid også er gjenstand for tilpasning. I dette problemet er det tre frihetsgrader som benyttes til optimeringen. Problemet er nå:

$$Max_{(n,x_1,h)}\; U(\frac{w}{p}n - \frac{q}{p}x_1, x_1 + g(h), T - n - h) := V(n, x_1, h).$$

En indre løsning må nå oppfylle, der vi skriver $V_x = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}$, osv:

$$\begin{cases} V_x = -U_c \cdot \dfrac{q}{p} + U_x = 0 \Leftrightarrow \frac{U_x}{U_c} = \frac{q}{p} \; for\ optimal\ n\ og\ h\ (gitt\ inntekt) \\ V_h = U_x \cdot g'(h) - U_f = 0 \Leftrightarrow \frac{U_x}{U_f} = \frac{1}{g'(h)} \; for\ gitt\ n\ og\ x_1 \\ V_n = U_c \cdot \dfrac{w}{p} - U_f = 0 \Leftrightarrow \frac{U_f}{U_c} = \frac{w}{p} \; for\ gitt\ h\ og\ x_1 \end{cases}$$

Den første betingelsen viser hvordan den gitte lønnsinntekten skal anvendes til kjøp av de to varene – standard tilpasning. Den andre viser hvordan tiden $T - n$, når arbeidstid og arbeidsinntekt er bestemt, skal anvendes til fritid og til hjemmeproduksjon, slik vi beskrev i foregående punkt. Den siste betingelsen, som er utvidelsen, bestemmer avveiningen mellom nyttegevinsten av høyere inntekt og nyttetapet av mindre fritid. Fra de to første, kombinert med den siste betingelsen finner vi da:

$$\frac{\frac{U_x}{U_c}}{\frac{U_x}{U_f}} = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{1}{g'(h)}} \Leftrightarrow \frac{U_f}{U_c} = \frac{qg'(h)}{p} = \frac{w}{p}$$

Denne siste betingelsen sier at: $qg'(h) = w$ eller $q = \frac{w}{g'(h)}$. Her uttrykker $\frac{1}{g'}$ hvor mange timer en må bruke i hjemmeproduksjonen for å få en enhet til av x-varen. Hver time koster i alternativ anvendelse (arbeid) w kroner, slik at $\frac{w}{g'(h)}$ er grensekostnaden i hjemmeproduksjonen. I optimum må denne balanseres eller avstemmes mot hva en enhet av x-varen koster i markedet; nemlig q kroner. Ved å jobbe en time til, vil en få høyere inntekt, men mindre fritid for gitt tid brukt i hjemmeproduksjonen.

Når lønna nå øker, vil grensekostnaden i hjemmeproduksjon øke. Til gitt pris på x-varen q, vil nå færre timer anvendes i hjemmeproduksjon – vises i en figur med stigende grensekostnad som skifter vertikalt opp om lønna øker. Dermed vil mer tid anvendes på fritid og på arbeidstid. (Skulle $\frac{w}{g'(0)} > q$, vil en velge $h = 0$.) Den økte arbeidstiden gir høyere inntekt som kan brukes til å kjøpe mer av c-varen og av x-varen ute, såfremt varenes inntektselastisiteter er positive.

Denne modellen kan brukes til å beskrive utviklingen i en økonomi i overgangen fra naturalhusholdning (der en nærmest var selvforsynt av konsumvarer fra hjemmeproduksjon, med lite innslag av tradisjonelt lønnsarbeid) til en mer «moderne» økonomi der en kjøper alle varer i markedet. Beskrivelsen kan gå som følger: Generell produktivitetsutvikling i samfunnet vil gjøre lønnsarbeid mer lønnsomt (reallønna øker), samtidig som det også foregår en teknisk utvikling i hjemmeproduksjonen (via tekniske hjelpemidler brukt hjemme – bare tenk på vaskemaskin og støvsuger), som gir positivt skift i grenseproduktiviteten g'. Hvis utviklingen er slik at $\frac{w}{g'(h)}$ øker over tid, samtidig som varer omsettes til lavere priser (også som følge av produktivitetsutvikling), vil over tid h gå ned, hvilket vi har observert.

En korrekt beskrivelse vil måtte se på utviklingen i realstørrelser. Hvis vi måler alle priser i enheter av c-varen, kan vi tenke oss at $\frac{w}{p}$ øker over tid. Denne utviklingen forteller oss at vi blir mer produktive ved at vi får flere enheter av c-varen per times arbeid. Hvis produktivitetsutviklingen er noenlunde uniform, slik at $\frac{q}{p}$ er nærmest konstant (hvordan utviklingen for denne realprisen – som angir hvor mange enheter av c-varen en enhet av x-varen koster i markedet – må også relateres til endringer i etterspørselsmønsteret over tid), vil tilpasningen over beskrives ved $\frac{U_f}{U_c} = \frac{q}{p} g'(h) = \frac{w}{p}$. Hvis også MSB mellom fritid og c-konsum endres over tid i form av at «avkastningskravet» til fritid øker – en må ha mer av c-varen per times fritid en gir opp – vil h helt sikkert gå ned, siden g' nå må øke, dvs. at h må gå ned. Det blir mer tid disponibelt til arbeid og fritid. Høyere reallønn vil virke inn på fritidsetterspørselen gjennom to kanaler som trekker i hver sin retning: Høyere reallønn gjør fritid dyrere – substitusjonseffekten trekker i retning av mindre fritid og mer arbeid, mens inntektseffekten trekker i retning av mer fritid (mindre arbeid) hvis fritid er fullverdig hvilket synes rimelig. Imidlertid vil $T - h$ nå gå opp, slik at vi $\frac{w}{p}(T - h)$ øker; vi blir rett og slett «rikere». Denne «rene» inntektseffekten vil forsterke etterspørselen etter mer fritid og mer andre goder. (Hvordan denne inntektsøkningen fordeler seg på de ulike konsumkategoriene, vil avhenge av godenes inntektselastisiteter.)

Imidlertid, for å få full forståelse av denne utviklingen kreves strengt tatt en generell likevektsmodell, der en studerer hvordan produktivitetsutviklingen påvirker produksjon som igjen er avhengig av endringer i etterspørsel som igjen er avhengig av utviklingen i realpriser og realinntekt som igjen er avhengig av produktivitetsutviklingen og endringer i produksjonsmønsteret, osv. (Slike modeller vil dere møte i ECON 3610 og i ECON 2915.)